

Mini-Curso 7*Sobre o Infinito, o que sabemos?*

LUCIANO MONTEIRO DE CASTRO

1. Determine se cada um dos conjuntos a seguir é enumerável ou não.
 - (a) O conjunto de todos os subconjuntos *finitos* de \mathbb{N} .
 - (b) Um conjunto de infinitos intervalos disjuntos de \mathbb{R} .
 - (c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y \in \mathbb{Q}\}$.
 - (d) O conjunto dos números reais algébricos (raízes de polinômios com coeficientes inteiros).
 - (e) O conjunto de todas as sequências cujos termos são 0 ou 1.
 - (f) O conjunto dos números reais do intervalo $[0, 1]$ cuja representação em base 3 (ou uma delas se houver duas) é formada apenas pelos algarismos 0 e 2.
2. Defina explicitamente uma função bijetiva de \mathbb{N} em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
3. Prove que existe uma bijeção entre \mathbb{R} e $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (conjunto de todos os subconjuntos de \mathbb{N}).
4. Prove que não pode existir uma função bijetiva de A em $\mathcal{P}(A)$, qualquer que seja o conjunto A .
5. (OBM 2004 – Nível Universitário) Prove que não existe um conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$, $\{y \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in A\}$ é finito e, para todo $y \in \mathbb{R}$, $\{x \in \mathbb{R} \mid (x, y) \notin A\}$ é enumerável.