QUEM DISSE QUE ZERO SOBRE ZERO É INDETERMINADO?

LUCIANO MONTEIRO DE CASTRO

A expressão $\frac{a}{b}$, onde a e b são números (reais, por exemplo) só está definida para $b \neq 0$. Isso porque $\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$, onde b^{-1} é o inverso (multiplicativo) de b. O inverso de b é definido pela propriedade $b \cdot b^{-1} = 1$. Como não existe número cujo produto por 0 seja igual a 1, concluímos que 0 não possui inverso multiplicativo, logo a expressão $\frac{a}{0}$ não faz sentido (não está definida) qualquer que seja o número a. Em outras palavras, $\frac{0}{0}$ **não existe**.

Mas, então, por que é tão comum ouvirmos ou lermos que $\frac{0}{0}$ é indeterminado?

Os dois motivos principais, de acordo com minha experiência, são a equação $0 \cdot x = 0$ e o limite $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ quando $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to a} g(x) = 0$.

1. A equação $0 \cdot x = 0$

Um argumento comum para defender a tese de que $\frac{0}{0}$ é indeterminado é o seguinte:

"A expressão $\frac{a}{b}$ representa a solução da equação $b \cdot x = a$. Quando $b = 0$ e $a \neq 0$ a equação não tem solução, logo $\frac{a}{0}$ não existe para $a \neq 0$. No entanto, quando $b = 0$ e $a = 0$ obtemos a igualdade $0 \cdot x = 0$, que é válida para todo x real. Assim, $\frac{0}{0}$ pode assumir qualquer valor real, sendo, portanto, indeterminado."

O principal erro deste argumento está na passagem de $b \cdot x = a$ para $x = \frac{a}{b}$, que *só é possível quando* $b \neq 0$. Por mais que estejamos acostumados a fazer este tipo de passagem de forma automática, é importante entender por que (e quando) ela funciona: porque multiplicamos os dois lados da igualdade pelo número b^{-1}, que existe se, e somente se, $b \neq 0$.

Observe que isto é exatamente o que fazemos com matrizes: Se A e B são matrizes conhecidas e desejamos resolver a equação matricial $B \cdot X = A$, por mais que nos sintamos tentados a escrever $X = \dfrac{A}{B}$, sabemos que isto não faz sentido. No entanto, este mesmo impulso sugere a forma mais simples de resolver a equação: "Dividir é multiplicar pelo inverso. No caso de matrizes, eu não posso dividir, mas eu posso multiplicar pelo inverso! Isto é, *se o inverso existir*".

Assim, se B é uma matriz invertível, a equação $B \cdot X = A$ é equivalente a $B^{-1} \cdot B \cdot X = B^{-1} \cdot A$, ou seja, $X = B^{-1} \cdot A$. Neste caso, há exatamente uma solução, qualquer que seja a matriz A com dimensões compatíveis com o produto $B^{-1} \cdot A$.

Agora, se B não é invertível, a equação pode ou não ter soluções, dependendo de B e de A. Ao contrário da equação numérica, pode haver infinitas soluções mesmo quando $B \neq 0$ ou $A \neq 0$ (0 aqui representa a matriz nula).

Em resumo, quando b não é invertível, o número de soluções da equação $b \cdot x = a$ (com números, matrizes ou outro tipo de estrutura algébrica) depende de a e de b.

1.1. **Você Utiliza a Regra de Cramer Corretamente?** A chamada *Regra de Cramer* para resolução de sistemas lineares é um clássico exemplo dos perigos que o erro de considerar $\dfrac{0}{0}$ como "indeterminado" pode causar. Para o que nos interessa, é suficiente considerarmos sistemas 3×3. Utilizaremos a notação usual: x, y, z são as incógnitas, Δ é o determinante principal do sistema e Δ_x, Δ_y, Δ_z, os determinantes secundários correspondentes a cada uma das incógnitas. A Regra de Cramer baseia-se no seguinte

Teorema: Se $\Delta \neq 0$, então o sistema admite uma única solução, dada por $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}$, $z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta}$. Se $\Delta = 0$ e pelo menos um dos determinantes Δ_x, Δ_y, Δ_z é *diferente* de zero, então o sistema é impossível.

E o teorema termina aqui. Quando $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, o sistema pode ser indeterminado ou impossível e o simples cálculo desses determinantes **NÃO** é suficiente para distiguir entre um caso ou outro. Uma análise mais detalhada do sistema é necessária (por exemplo, através do *Teorema de Rouché-Capelli*).

No entanto, muitos estudantes (e até mesmo alguns professores), talvez induzidos pelo "cálculo" $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{0}{0}$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{0}{0}$, $z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{0}{0}$ afirmam que $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ implica que o sistema é indeterminado.

O erro de tal afirmação fica evidente mediante um contra-exemplo. O seguinte sistema é claramente impossível

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \end{cases},$$

já que $x + y + z$ não pode ser ao mesmo tempo igual a 0, 1 e 2. No entanto, para este sistema, os determinantes Δ, Δ_x, Δ_y e Δ_z são todos nulos (todos têm pelo menos duas colunas iguais).

2. O Limite $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ Quando $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$

Outro argumento comum para "justificar" que $\frac{0}{0}$ é indeterminado é o seguinte:

"Quando tanto o numerador quanto o denominador de uma fração tendem a zero, o limite do quociente é indeterminado. Portanto, $\frac{0}{0}$ é indeterminado."

O problema principal aqui é o uso da palavra "indeterminado". Por exemplo, diante da tarefa de calcular $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, é comum ver um aluno substituir x por 1 e "obter" $\frac{0}{0}$. Então ele afirma, com segurança: "Ah, este limite é indeterminado". Após fatorar e simplificar, ou aplicar a regra de L'Hôpital, ele encontra que o limite vale 2, sem perceber a contradição: Se o limite é igual a 2, como pode ser indeterminado?

Contribui com esta confusão a nomenclatura utilizada na maioria do livros de cálculo: "Indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$" ou "Forma indeterminada $\frac{0}{0}$". Nestas frases deve-se entender que o símbolo $\frac{0}{0}$ está sendo utilizado em outro contexto e com outro significado em relação a frações numéricas como $\frac{22}{7}$.

Vamos entender exatamente que significado é este. O teorema do quociente para limites é o seguinte:

Teorema: Se $\lim_{x \to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$ e $B \neq 0$, então

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

Se $B = 0$ e $A \neq 0$, não existe o limite $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$. (para que o limite *exista*, a função deve tender a um número real; $-\infty$ e $+\infty$ não são números reais).

E o teorema termina aqui.

Se $A = 0$ e $B = 0$, o limite do quociente pode ou não existir, e quando existe pode assumir qualquer valor real. Este é o único caso em que não somos capazes de determinar o limite do quociente *apenas com a informação sobre os valores dos limites do numerador e do denominador*. Eis então o verdadeiro sentido da palavra *indeterminado* neste contexto: os valores de A e B não são suficientes para determinar o limite, precisamos de mais informações sobre as funções.

Em minha opinião, porém, continua soando um tanto paradoxal dizer, por exemplo, que $\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{\operatorname{sen} x - x}$ é uma "indeterminação (do tipo $\frac{0}{0}$)" e, ao mesmo tempo dizer que $\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{\operatorname{sen} x - x} = -6$. Por isso eu prefiro banir completamente a expressão $\frac{0}{0}$, independentemente do contexto.

Você Concorda? Discorda? Tem Algo a Acrescentar? Alguma Pergunta?

Então, escreva um comentário em http://www.aprender.blog.br/2010/04/quem-disse-que-zero-sobre-zero-e.html.