P.A. DE ORDEM SUPERIOR, OPERADOR DIFERENÇA, SOMATÓRIOS

LUCIANO MONTEIRO DE CASTRO

Este pequeno artigo foi escrito como complemento à palestra sobre Progressões ministrada no IMPA durante o PAPMEM em julho de 2010. A palestra encontra-se disponível em vídeo no site de vídeos do IMPA: http://video.impa.br.

A dedução mais comum para a fórmula que calcula a soma S_n dos n primeiros termos de uma P.G. $\{a_k\}$, de razão $q \neq 1$, baseia-se no fato de que se pode passar de um termo para o seguinte mediante uma operação muito simples: multiplicação por uma constante. Assim, partindo da igualdade $a_{k+1} = q \cdot a_k$ e somando de $k = 1$ até $k = n$, podemos colocar q em evidência no lado direito e obter $q \cdot S_n$. Do lado esquerdo obtemos "quase"S_n, faltando apenas a_1 e sobrando a_{n+1}. Utilizando a notação de somatório, essas contas ficam assim:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k+1} = \sum_{k=1}^{n} q \cdot a_k \Rightarrow S_n - a_1 + a_{n+1} = q \cdot S_n \Rightarrow S_n = \frac{a_{n+1} - a_1}{q - 1} = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Após realizar esta dedução, poderíamos ponderar sobre a eficácia de empregar a mesma ideia para o cálculo da soma S_n dos n primeiros termos de uma P.A. $\{a_k\}$ de razão r, já que também se pode passar de um termo para o seguinte mediante uma operação simples: adição de uma constante. Assim, partimos agora da igualdade $a_{k+1} = a_k + r$ e somamos também de $k = 1$ até $k = n$, obtendo

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k+1} = \sum_{k=1}^{n} (a_k + r) \Rightarrow S_n - a_1 + a_{n+1} = S_n + n \cdot r \Rightarrow a_{n+1} = a_1 + n \cdot r.$$

Frustrante, já que S_n aparece nos dois lados com o mesmo coeficiente, cancelando-se. Mas, apesar de não funcionar para o cálculo de S_n, a conta que fizemos não foi completamente inútil, não é? Ela nos permitiu calcular a expressão para a_{n+1} em função de a_1, n e r, normalmente conhecida como *termo geral* da P.A.

Isto não é por acaso. A igualdade $a_{k+1} = a_k + r$ pode ser reescrita como $a_{k+1} - a_k = r$, ou seja, *a diferença entre dois termos consecutivos* da P.A. é igual à constante r. O cálculo anterior sugere que se conhecemos a diferença entre dois termos consecutivos de uma sequência, podemos reduzir o cálculo de seu termo geral a um somatório. Este conceito é tão importante que é conhecido como

Teorema Fundamental da Somação

Dada uma sequência $\{a_k\}$, definindo $\Delta a_k = a_{k+1} - a_k$, temos

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta a_k = a_{n+1} - a_1.$$

Por transformar sequências (funções) em outras sequências (funções), Δ é chamado de *operador*. Mais especificamente, Δ é conhecido como o *operador diferença.* Além de ter outras propriedades interessantes que não mencionaremos aqui, Δ é um *operador linear*, ou seja $\Delta(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \Delta a_n + \beta \Delta b_n$, para quaisquer constantes α e β.

No caso da P.A., o termo geral é um polinômio do primeiro grau em n, e a diferença é constante (polinômio de grau zero).

Observando a fórmula (já deduzida durante a palestra) para S_n, a soma dos n primeiros termos da P.A., observamos que S_n é um polinômio do *segundo grau* em n. Podemos chegar à mesma conclusão observando que $\Delta k^2 = (k+1)^2 - k^2 = 2k + 1$. Utilizando o teorema fundamental da somação, obtemos

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta k^2 = (n+1)^2 - 1^2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} (2k+1) = n^2 + 2n \Rightarrow 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = n^2 + 2n$$

$$\Rightarrow 2\sum_{k=1}^{n} k + n = n^2 + 2n \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Esta última igualdade nos fornece outra maneira de deduzir a fórmula para S_n, já que a_k é um polinômio do primeiro grau em k (deixamos os detalhes ao leitor).

P.A. de Ordem Superior

Sequências como $\{S_n\}$, cujo termo geral é um polinômio do segundo grau, são chamadas de *P.A. de segunda ordem*, e também podem ser caracterizadas pela propriedade de que as diferenças entre termos consecutivos formam uma P.A. (de primeira ordem).

Generalizando, podemos definir indutivamente P.A. de ordem $m+1$ como uma sequência cujas diferenças consecutivas formam uma P.A. de ordem m. Uma importante consequência desta definição é a seguinte:

A sequência das somas dos n primeiros termos de uma P.A. de ordem m, para $n = 1, 2, 3, \ldots$, é uma P.A. de ordem $m+1$.

Para provar isso, basta observar que $a_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})$ (uma espécie de *recíproco* do teorema fundamental da somação).

Já sabemos que P.A.s são funções do primeiro grau, e P.G.s são funções do tipo exponencial. Agora, é natural fazer a pergunta: *Que tipo de funções são as P.A.s de ordem superior?*. A resposta é dada pelo seguinte teorema.

Teorema: A sequência $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma P.A. de ordem m se, e somente se, a_n é um polinômio de grau m na variável n. *Demonstração*:

Provaremos inicialmente dois lemas:

Lema 1: Para todo inteiro positivo m, Δn^m é um polinômio em n de grau $m-1$ (aqui, consideramos n^m como uma sequência na variável n).

Demonstração: $\Delta n^m = (n+1)^m - n^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} n^k - n^m = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} n^k$ (que é um polinômio de grau $m-1$).

Lema 2: Para todo inteiro positivo m, se a_n é um polinômio de grau m na variável n, então $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ é um polinômio de grau $m+1$ em n.

Demonstração: Procedemos por indução em m. O resultado é verdadeiro para polinômios de grau zero. Supondo o resultado válido para polinômios de grau menor que m, seja a_n um polinômio de grau m, e escreva $a_n = an^m + p(n)$, onde $p(n)$ é um polinômio de grau $m-1$. Logo $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} ak^m + \sum_{k=1}^{n} p(k)$. Pela hipótese de indução, $\sum_{k=1}^{n} p(k)$ é um polinômio de grau m. Para ver que $\sum_{k=1}^{n} ak^m$ é um polinômio de grau $m+1$, observe que a demonstração do Lema 1 prova que $\Delta k^{m+1} = (m+1)k^m + q(k)$, onde $q(k)$ é um polinômio de grau $m-1$, logo $ak^m = \frac{a}{m+1}\Delta k^{m+1} + \frac{a}{m+1}q(k)$, e agora basta usar o teorema fundamental da somação e outra vez a hipótese de indução (novamente sugerimos que o leitor complete os detalhes).

Demonstração do Teorema: Procedemos por indução em m. O teorema é válido para $m = 1$, pois as P.A.s são exatamente as sequências que são funções de primeiro grau. Supondo o teorema válido para P.A.s de ordem menor que m, se a_n é polinômio de grau m, Δa_n é polinômio de grau $m-1$ (Lema 1), logo é P.A. de ordem $m-1$ (hipótese de indução). Reciprocamente, se a_n é P.A. de ordem m, então Δa_n é P.A. de ordem $m-1$, e ,por hipótese de indução, polinômio de grau $m-1$. O teorema fundamental da somação e o Lema 2 garantem, então, que a_n é polinômio de grau m.

Se você tem alguma pergunta ou algo a acrescentar, seu comentário é muito bem vindo em http://www.aprender.blog.br