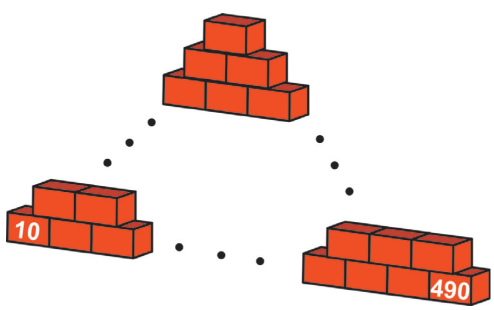
Progressões

Prof. Luciano Monteiro de Castro

1. Em uma progressão aritmética de 17 termos, o sétimo termo é igual a 13 e o décimo primeiro termo é igual a 27. Calcule a soma dos termos dessa progressão.

2. A que taxa anual de juros compostos devo investir meu capital a fim de que ele dobre em 5 anos?

3. Uma parede triangular de tijolos foi construída da seguinte forma. Na base foram dispostos 100 tijolos, na camada seguinte, 99 tijolos, e assim sucessivamente até restar 1 tijolo na última camada, como mostra a figura. Os tijolos da base foram numerados de acordo com uma progressão aritmética, tendo o primeiro tijolo recebido o número 10, e o último, o número 490. Cada tijolo das camadas superiores recebeu um número igual à média aritmética dos números dos dois tijolos que o sustentam.



Determine a soma dos números escritos nos tijolos.

4. A progressão $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ é definida por $a_1 = 9$ e $3a_{n+1} + a_n = 4$ para $n \geq 1$. Calcule a soma dos n primeiros termos dessa progressão.

5. Calcule $\displaystyle\sum_{k=1}^{2010} \left\lfloor \sqrt[3]{k} \right\rfloor$, onde $\lfloor x \rfloor$ representa o maior inteiro que não supera o número real x.

Soluções

1.
$$S_{17} = 17 \cdot \frac{a_1 + a_{17}}{2} = 17 \cdot \frac{a_7 + a_{11}}{2} = 17 \cdot \frac{13 + 27}{2} = 340.$$

2. Sendo i a taxa anual, a cada ano o capital fica multiplicado por $1 + i$. Para que dobre em 5 anos devemos ter $(1 + i)^5 = 2$, logo $1 + i = \sqrt[5]{2} \approx 1,1487$, e a taxa anual aproximada é 14,87 %.

3. A maneira mais rápida de resolver este problema é observar que os números escritos em qualquer das camadas de tijolos forma uma P.A., e todas essas P.A.s têm a mesma média aritmética. Estes fatos podem ser demonstrados de maneira algébrica, mas há um argumento geométrico bastante instrutivo: Imaginemos uma régua posicionada na base da parede de tijolos, posicionada e graduada de forma que a projeção ortogonal do centro de um tijolo da primeira camada sobre a régua seja o ponto marcado com o mesmo número do tijolo (Isto é possível porque os números da primeira camada formam uma P.A.). Agora, para qualquer das camadas superiores, o número escrito em qualquer tijolo continuará correspondendo à projeção ortogonal do centro do tijolo sobre a régua, pois o centro de cada tijolo estará projetado sobre o ponto médio dos centros dos tijolos sobre os quais se apoia. Como a distância entre os centros de dois tijolos consecutivos de uma camada é sempre a mesma (igual ao comprimento de um tijolo), e todas as camadas têm um eixo de simetria horizontal correspondente ao ponto da régua associado à média aritmética dos números escritos na primeira camada, ambos os fatos citados anteriormente estão justificados. Para concluir, basta observar que a soma dos termos de uma P.A. é igual ao número de termos multiplicado pela média desses termos, que é igual à média entre o primeiro e o último. A soma total será, portanto,
$$(100 + 99 + 98 + \cdots + 2 + 1) \times \frac{10 + 490}{2} = \frac{100 \times 101}{2} \times 250 = 1\,262\,500.$$

4. Defina a sequência $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ de forma que $a_n = b_n + 1$. Então $b_1 = 8$ e, para $n \geq 1$, $3(b_{n+1} + 1) + b_n + 1 = 4$, ou seja, $b_{n+1} = -\frac{1}{3} b_n$, o que prova que b_n é uma P.G. de razão

$-\frac{1}{3}$. Assim,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}(b_k+1) = \sum_{k=1}^{n} b_k + n = \frac{8\times\left((-\frac{1}{3})^n - 1\right)}{-\frac{1}{3}+1} + n = \frac{4\left((-1)^n - 3^n\right)}{3^{n-1}} + n.$$

5. Primeiramente observamos que $\lfloor \sqrt[3]{x} \rfloor = k \in$ se, e somente se, $k^3 \leq x < (k+1)^3$. Logo há $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2+3k+1$ inteiros x com essa propriedade. Como $12 < \sqrt[3]{2}010 < 2010$, a soma procurada pode ser dividida em 2 partes:

$$\sum_{k=1}^{2010}\left\lfloor \sqrt[3]{k} \right\rfloor = \sum_{k=1}^{11}(3k^2+3k+1)\cdot k + \sum_{k=12^3}^{2010} 12 = 3\sum_{k=1}^{11} k^3 + 3\sum_{k=1}^{11} k^2 + \sum_{k=1}^{11} k + (2011-1728)\times 12 =$$

$$3\times\left(\frac{11\times 12}{2}\right)^2 + 3\times\frac{11\times 12\times 23}{6} + \frac{11\times 12}{2} + 283\times 12 = 18\,048.$$

Se você tem soluções alternativas, perguntas ou comentários, sua contribuição é bem-vinda em http://www.aprender.blog.br.