Probabilidade

Prof.Luciano Monteiro de Castro

1. Luciana tem três canetas pretas e três vermelhas. Ontem ela pegou, ao acaso, uma dessas canetas e colocou-a na bolsa. Hoje ela colocou uma caneta preta na bolsa. Se ela retirar uma dessas duas canetas da bolsa, sem olhar, qual a probabilidade de essa caneta ser preta?

2. As camponesas de certa região têm uma superstição curiosa para determinar quando vão casar: A solteira segura em uma das mãos seis folhas longas de capim, pelo centro delas, de forma que as pontas fiquem de fora, acima e abaixo da mão. Uma amiga sua amarra as seis pontas de cima duas a duas, de maneira aleatória, e depois faz o mesmo com as pontas de baixo. Se as folhas de capim assim amarradas formarem um único anel, as camponesas crêem que a solteira se casará em menos de um ano. Determine a probabilidade de o anel ser formado.

3. O atirador A tem probabilidade $\dfrac{3}{5}$ de acertar um alvo e o atirador B tem probabilidade $\dfrac{4}{7}$ de acertar o mesmo alvo. Se ambos atiram juntos (um tiro cada um), qual a probabilidade de o alvo ser atingido?

4. Um dado é lançado três vezes. Se o número de pontos obtidos no terceiro lançamento for igual à soma dos dois números de pontos obtidos nos lançamentos anteriores, qual é a probabilidade de que o 2 apareça pelo menos uma vez?

5. Dividindo aleatoriamente um segmento em três partes, qual é a probabilidade de que esses novos segmentos formem um triângulo?

Soluções

1. É mais fácil calcular a probabilidade do evento complementar, ou seja, a probabilidade de a caneta não ser preta: para isso, dois eventos devem ocorrer. Primeiro, a caneta que ela pegou ao acaso ontem deve ser vermelha (probabilidade $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$). Dado que isto ocorreu, a caneta que ela retira hoje deve ser vermelha (probabilidade $\frac{1}{2}$). A probabilidade de que ocorram ambos é, portanto, $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Assim, a probabilidade pedida é igual a

$$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

2. Vamos numerar as folhas de capim de 1 a 6 e representar por a_b o fato de as folhas de números a e b terem sido amarradas por baixo e por $a^{-}b$ o fato de elas terem sido amarradas por cima. Suponha que a numeração foi feita de modo que 1_2, 3_4 e 5_6. Para que o anel seja formado, a folha 1 deve ser amarrada por cima a $3, 4, 5$ ou 6, mas não a 2. Isso ocorre com probabilidade $\frac{4}{5}$. Dado que este evento ocorre, podemos supor sem perda de generalidade que $1^{-}3$. Agora, devemos ter $2^{-}5$ ou $2^{-}6$, o que ocorre com probabilidade $\frac{2}{3}$ (a única outra opção é $2^{-}4$, e as três têm mesma probabilidade). Se ocorrem ambos os eventos, sobra apenas uma possibilidade para o terceiro nó de cima, e o anel é formado. Assim, a probabilidade pedida é igual a

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{15}.$$

3. **1ª Solução**

   Denotando também por A e B os eventos correspondentes aos atiradores A e B acertarem o alvo, respectivamente, queremos calcular $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$. Como A e B são independentes, $p(A \cup B) = p(A) \cdot p(B)$, logo a probabilidade pedida é igual a

$$\frac{3}{5} + \frac{4}{7} - \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7} = \frac{29}{35}.$$

   2ª Solução

   O evento complementar significa que A e B erram o alvo, e sua probabilidade é igual ao produto das probabilidades de cada um deles errar o alvo, pois são eventos independentes.

Assim, a probabilidade pedida é igual a

$$1 - \left(1 - \frac{3}{5}\right) \cdot \left(1 - \frac{4}{7}\right) = 1 - \frac{6}{35} = \frac{29}{35}.$$

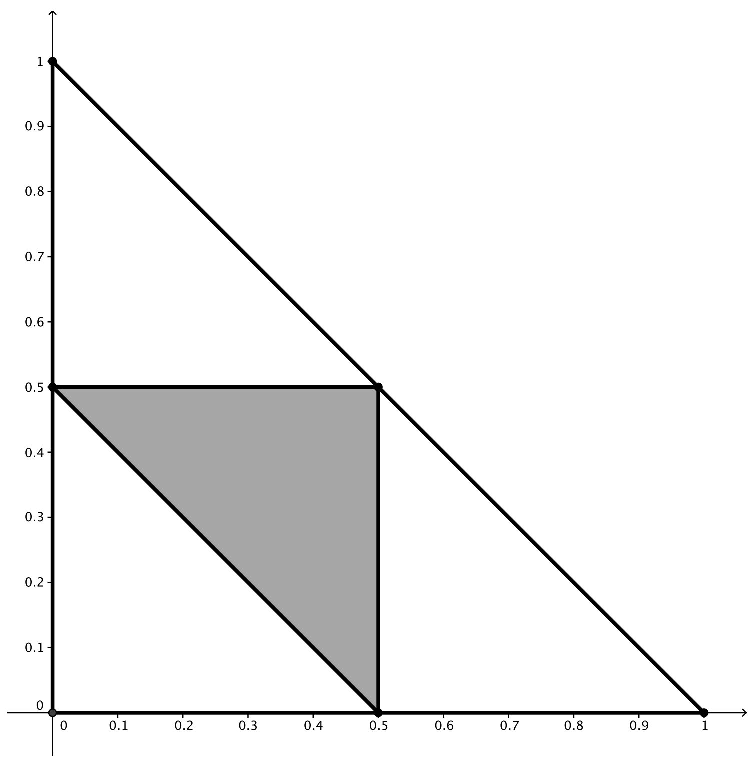
4. A soma dos números dos dois primeiros lançamentos deve ser menor ou igual a 6, o que ocorre com probabilidade $\frac{1+2+3+4+5}{36} = \frac{5}{12}$. Dado que isto ocorre, a probabilidade de que essa soma seja o número do terceiro lançamento é $\frac{1}{6}$. Assim, a probabilidadde de que o número de pontos obtidos no terceiro lançamento seja igual à soma dos dois números de pontos obtidos nos lançamentos anteriores é $\frac{5}{12} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{72}$. As sequências de lançamentos deste tipo nas quais o 2 aparece são $(1, 1, 2)$, $(2, 2, 4)$, $(x, 2, x + 2)$ e $(2, x, x + 2)$, para $x \in \{1, 3, 4\}$. Assim, há um total de 8 sequências, e a probabilidade (absoluta) de ocorrer alguma delas é $\frac{8}{6^3} = \frac{1}{27}$. A probabilidade condicional é, portanto,

$$\frac{1/27}{5/72} = \frac{8}{15}.$$

5. Sejam x e y os comprimentos dos dois segmentos cortados que contêm os vértices do segmento original, cujo comprimento será nossa unidade de medida. Assim, devemos ter $x+y < 1$ e o comprimento do terceiro segmento será $1-x-y$. Nosso espaço amostral será, portanto, o conjunto dos pares ordenados $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $x, y > 0$ e $x + y < 1$. Para que se forme um triângulo, é necessário e suficiente que cada tenha comprimento menor que a soma dos comprimentos dos outros dois, o que significa

$$\left\{\begin{array}{c} x < 1 - x \\ \\ y < 1 - y \\ \\ 1 - x - y < x + y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x < \\ \\ y < 1 - y \\ \\ 1 - x - y < x + y \end{array}\right]$$

A figura a seguir representa o espaço amostral (triângulo maior) e os pares (x, y) tais que os três segmentos formam um triângulo (triângulo cinza).



Como todos os pares ordenados têm mesma probabilidade de ocorrer, a probabilidade pedida será a razão entre as áreas do triângulo cinza e do maior, que é igual a $\frac{1}{4}$.

Se você tem soluções alternativas, perguntas ou comentários, sua contribuição é bem-vinda em http://www.aprender.blog.br.